CONCOURS D'ADMISSION A L'E.S.M. DE SAINT-CYR EN 1976

●

OPTION SCIENCES

MATHEMATIQUES (Epreuve A)

Durée : 4 heures

Mercredi 5 mai 1976 de 8 heures à 12 heures

●

Notations. - $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{R}$ celui des nombres réels, $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$, $\mathbb{R}^+$ est l'ensemble des réels positifs ou nuls, $\mathbb{R}^{+*}$ celui des réels positifs. On note f' la dérivée de la fonction f.

La partie III est indépendante de II, dans II et III on utilise des résultats établis dans I.

Dans les constructions de courbes de I-4) et III-3) on ne cherchera pas à localiser les points d'inflexion.

Soit δ l'application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $\delta(x) = \dfrac{\text{Log}(1+x^2)}{x}$ pour $x \in \mathbb{R}^*$ et par $\delta(x) = 0$, pour $x = 0$, δ est alors continue sur $\mathbb{R}$, on pose $\varphi(x) = \int_0^x \delta(t)\,dt$.

I

1) **a)** Dire pourquoi δ est continue sur $\mathbb{R}$. Donner le développement limité d'ordre 4 de la fonction φ au voisinage de 0.

b) On pose $g(x) = \delta(x) - \dfrac{2\,\text{Log}\,x}{x}$ pour $x \geqslant 1$ Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} g(x)\,dx$ existe, en déduire que pour $x > 0$ on peut écrire :

$$\varphi(x) = (\text{Log}\,x)^2 + G(x) + \varphi(1)$$

où $G(x)$ a une limite finie quand x tend vers $+\infty$.

2) **a)** En étudiant les variations des fonctions :

$$x \to \text{Log}(1+x) - x \quad \text{et} \quad x \to \text{Log}(1+x^2) - \frac{x^2}{1+x^2} \text{ pour } x > 0)$$

démontrer pour $x > 0$ les deux inégalités,

$$(1)\quad 0 < \text{Log}(1+x) < x,$$

$$(2)\quad 0 < \frac{x^2}{1+x^2} < \text{Log}(1+x^2).$$

b) Déduire du **a)** la double inégalité pour $x > 0$

$$(3)\quad \text{Log}(1+x^2) < 2\varphi(x) < x^2$$

ainsi qu'un encadrement de $\varphi(1)$.

3) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{\varphi(x)}{x^2}$

a) Montrer que l'on peut prolonger f en 0 par continuité. Soit $\bar{f}$ la fonction ainsi obtenue, déterminer $\bar{f}'(0)$.

b) Etudier les variations de $\bar{f}$.

4) Construire sur un même graphique les courbes représentatives de $\bar{f}$ et de φ.

.../...

II

1) Montrer par récurrence que $\int_1^{+\infty} \frac{(\text{Log } x)^n}{x^2}\, dx$ existe quel que soit $n \in \mathbb{N}$, donner sa valeur.

2) **a)** Montrer que les intégrales $I = \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x^2}\, dx$ et $J = \int_0^{+\infty} \frac{\text{Log } (1 + x^2)}{x^2}\, dx$ existent. Calculer J.

b) On pose :

$$I\ (\lambda, X) = \int_\lambda^X \frac{\varphi(x)}{x^2}\, dx\ ;$$

$$J\ (\lambda, X) = \int_\lambda^X \frac{\text{Log } (1 + x^2)}{x^2}\, dx$$

et :

$$K\ (\lambda, X) = \iint_D \frac{\text{Log } (1 + y^2)}{x^2\, y}\, dx\, dy$$ où D est le domaine de $\mathbb{R}^2$ défini par $\lambda \leqslant x \leqslant X$, $0 \leqslant y \leqslant x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$.

Montrer que :

$$I\ (\lambda, X) = K\ (\lambda, X) = \frac{\varphi\ (\lambda)}{\lambda} - \frac{\varphi\ (X)}{X} + J\ (\lambda, X)\ .$$

3) Déduire du 2) que I = J.

III

α étant un nombre réel quelconque, soit f_α la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f_\alpha\ (x) = \frac{\varphi\ (x)}{x^\alpha}$.

On notera C_α la courbe représentative de f_α.

1) **a)** Déterminer les limites de $f_\alpha\ (x)$ quand x tend vers 0 et quand x tend vers $+\infty$ suivant les valeurs attribuées à α.

b) Etudier les branches infinies des courbes C_α.

c) Etudier quand x tend vers 0 la limite de $f'_\alpha\ (x)$.

2) On suppose dans cette question $0 < \alpha < 2$ et soit g_α l'application de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}$ définie par $g_\alpha\ (x) = \text{Log } (1 + x^{2)} - \alpha\, \varphi\ (x)$.

a) Etudier les variations de la fonction $h_\alpha\ (x) = \frac{2\, x^2}{1 + x^2} - \alpha\, \text{Log } 1 + x^2)$ pour $x \geqslant 0$; en déduire le signe de la fonction $g_\alpha\ (x)$, et l'existence de $x_\alpha > 0$ tel que $g_\alpha\ (x_\alpha) = 0$.

b) Montrer qu'il existe α_0 unique tel que $g_{\alpha_0}\ (1) = 0$ avec $1 < \alpha_0 < 2$ (utiliser l'encadrement de $\varphi\ (1)$ partie I). En étudiant le signe de $g_\alpha\ (1)$ déterminer la position de x_α par rapport à 1.

3) **a)** Etudier les variations de f_α suivant les valeurs attribuées à α.

b) Tracer les différentes courbes C_α possibles sur un même graphique en précisant leurs positions respectives et en les plaçant par rapport aux courbes C_1, C_{α_0}, C_2. On remarquera que les courbes C_α passent toutes par un même point dont on donnera les coordonnées.

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail